Interrogation Orale de Cours du 22 novembre 2010

Dany-Jack Mercier

1 Introduction

PROGRAMME DE REVISION

- Chapitres 1 à 8 des Fondamentaux de géométrie [1] ;

- Chapitres 1 à 7 des Fondamentaux d'algèbre et d'arithmétique [2] ;

- Tous les TD vus du début des cours en septembre jusqu'à aujourd'hui à l'exception des trois TD d'Extraits de Concours proposés en Travail Autonome.

REMARQUES

Je rappelle que ces interrogations orales ont effectivement été posées en salle et que le candidat devait répondre debout au tableau en utilisant celui-ci (si le jury n'y voyait pas d'objection) pour s'expliquer ou débuter une recherche.

La facilité des questions posées n'est qu'apparente car le candidat, mis en situation de devoir comprendre la question et rassembler ses idées dans un très bref intervalle de temps, se trouve en situation de stress.

METHODE DE TRAVAIL PERSONNEL

Le lecteur qui désire s'entraîner pour l'oral et parfaire sa connaissance des fondamentaux pourra demander à un camarade ou un proche de s'asseoir et de lui poser ces questions alors que lui se trouve debout devant un tableau avec un bout de craie.

Dans cette mise en scène, il n'est pas nécessaire que la personne qui joue le rôle du jury sache quoi que ce soit en mathématiques ! Je me rappelle d'une correspondante qui m'avait expliqué comment elle avait énormément appris en demandant à son mari, qui ne connaissait rien aux mathématiques, de lui poser des questions lues sur les pages du CAPES interne de Mégamaths. A ses dires, cet entraînement lui avait permis d'éviter de gros écueils à l'oral du CAPES interne, et d'être admise.

[0] [ioc101122] ~tiufm11 Site Web MégaMaths

© 2010, Dany-Jack Mercier, copie autorisée uniquement pour votre usage personnel.

2 Interrogation n°1

Question 1 *Pouvez-vous définir le pgcd de deux entiers naturels a et b ? (2/2)*

Question 2 *Vous venez de définir un pgcd en utilisant des décompositions en produits de nombres premiers. Pouvez-vous nous dire une autre définition du pgcd qui ne fasse pas référence à la factorialité de $\mathbb{Z}$? (0/2)*

Question 3 *Comment définit-on un nombre premier ? (2/2)*

Question 4 *On suppose que les entiers u et v sont de parités différentes, et qu'ils sont premiers entre eux. Démontrez qu'alors $u^2 + v^2$ et $u^2 - v^2$ sont premiers entre eux. (0/5)*

Question 5 *Quand dit-on qu'un anneau est intègre ? (2/2)*

Question 6 *$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ est-il intègre ? Justifiez. (3/3)*

Question 7 *Pouvez-vous énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit intègre ? Pouvez-vous démontrer au tableau qu'il s'agit bien d'une condition nécessaire et suffisante ? (2/4)*

Note finale : 11/20.

3 Interrogation n°2

Question 8 *Définissez un corps. (2/2)*

Question 9 *On considère un anneau intègre fini. Que peut-on dire sur lui ? (3/3)*

Question 10 *Démontrez qu'un anneau intègre fini est un corps. (3/3)*

Question 11 *Pouvez-vous énoncer le Théorème des restes chinois ? (2/2)*

Question 12 *Pouvez-vous rechercher les grandes lignes de sa démonstration ? (5/5)*

Question 13 *Enoncez le petit Théorème de Fermat. (0/2)*

Question 14 *Le petit Théorème de Fermat énonce que, si a est un entier non divisible par un nombre premier p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Pouvez-vous démontrer "très rapidement" ce résultat ? (3/3)*

Note finale : 18/20.

Commentaires : Belle prestation à l'oral. La candidate est une ancienne taupine qui travaille régulièrement les questions déjà traitées en TD ou à regarder sur le cours. Elle arrive à organiser suffisamment ses souvenirs pour faire face au tableau malgré le stress, ce qui prouve qu'elle connaît parfaitement certains fondamentaux ! Voilà une carte maîtresse qu'elle pourra abattre au bon moment.

4 Interrogation n°3

Question 15 *a et b sont deux entiers premiers entre eux. On suppose que a et b divisent c. Montrez que ab divise alors c. (1,5/3)*

Question 16 *Démontrez que les trois médianes d'un triangle sont concourantes. (3/4)*

Question 17 *On se donne deux points B et C distincts. On se donne un point M non situé sur la droite (BC). Peut-on trouver un point A tel que M soit le centre de gravité du triangle ABC ? (0,5/2)*[1]

Question 18 *Résolvez le système de congruence :*

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 2 \\ x \equiv 1 \mod 5. \end{cases}$$

(2,5/5)

Question 19 *On se place dans un espace vectoriel euclidien E. Soit a un vecteur de E. Quelle est la nature de l'application s_a définie de E dans E en posant pour tout $x \in E$:*

$$s_a(x) = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{||a||^2}a \ ?$$

(4/4)[2]

Question 20 *Pouvez-vous dire quels sont les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? On ne demande pas de preuve. Par contre, pouvez-vous nous donner les générateurs du groupe $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$? (2/2)*

Note finale : 13,5/20.

Commentaires : La candidate sait plus des choses qu'elle peut en dire en situation de stress. Je sais qu'elle retrouverait facilement la réponse aux Questions 15 et 18 si elle était à l'écrit. Etant perdue au tableau, elle n'a pas pu trouver ses marques dans la Question 16 tout en ayant des idées exploitables.

Par contre, sa réaction rapide et efficace à la Question 19 montre qu'elle a bien travaillé et compris le dernier TD ! En continuant à investir sur les contenus des thèmes du concours, nulle doute que cette candidate possèdera les moyens de réussir.

References

[1] D.-J. Mercier, Fondamentaux de géométrie pour les concours (grandes écoles, CAPES, agrégation, ...), Publibook, 2009.

[2] D.-J. Mercier, Fondamentaux d'algèbre & d'arithmétique, Publibook, 2010.

[1] Cette question a été posée dans la première composition écrite du CAPES externe 2011.

[2] Voir Question **??**.